

一种常用的二维任意域的 Delaunay 三角剖分算法的健壮性补充

杨磊

(华东理工大学石化学院石化研究所, 上海 200540)

吴涛

(华东理工大学石化学院自动化系, 上海 200540)

摘要 由于对任意给定的平面点集通过 Delaunay 三角剖分进行处理可得到具有整体最优性的三角形网格, 因而该方法得到了广泛的重视. 但研究发现, 常用的二维任意域 Delaunay 三角剖分算法^[1,2]是有缺陷的, 它在构成 Delaunay 三角形候选点的选择过程中, 可以使候选点出现“位置违约”的错误, 即在候选节点链表中, 虽然可出现依据算法的判据有条件成为 Delaunay 三角形的构成点, 但采用该点构成 Delaunay 三角形后, 将违背 Delaunay 三角剖分“约束圆准则”, 这样会导致不正确的剖分结果, 因此, 该文就这一问题进行了分析和讨论, 并给出了可行的改进方案, 即通过调整原算法的数据结构或修改原算法的 Delaunay 三角剖分判据, 以提高算法的健壮性, 从而得到令人满意的 Delaunay 三角剖分网格. 前一种改进方案主要是重新调整了算法的数据结构, 这虽然对算法的健壮性有较大的帮助, 但对于已经将算法进行了应用的情形并不合适, 因此可以考虑使用后一种改进方案.

关键词 Delaunay 三角剖分 算法 健壮性 位置违约

中图分类号: O18 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2000)04-0323-04

Robust Supplement to A Delaunay Triangulation Algorithm on 2D Arbitrary Polygon

YANG Lei

(Research Ins. of Petrochemical, Petrochemical Institute of East China Univ. of Sci. and Tech., Shanghai 200540)

WU Tao

(Dept. of Automation, Petrochemical Institute of East China Univ. of Sci. and Tech., Shanghai 200540)

Abstract Attention was focused on Delaunay triangulation for its processed result is whole optimization. While according to the study on some Delaunay triangulation algorithms, there is a bug in a common Delaunay triangulation algorithm^[1,2] on 2D arbitrary polygon. According to the judge rule of the algorithm, it is possible to make result of Delaunay triangulation wrong with the effect of the “irregular position” vertex of polygon, “irregular position” vertex is the vertex which is in the candidate vertex set during the processing, but would break the “in-circle” rule of classical Delaunay triangulation if that vertex is selected for Delaunay triangle in the end. This question was analyzed and discussed in the paper, and then an improvement upon the algorithm is presented, i. e., adjusting the data structure of algorithm or modifying the judge rule to make the resultant triangle set correct and satisfied, the former method is better than the latter, but it costs more to the original algorithm.

Keywords Delaunay triangulation, Algorithm, Robustness, Irregular position

0 引言

网格划分是计算几何的主要研究内容. 多年来

的研究表明, 对于任意给定的平面点集, Delaunay 三角剖分可得到具有整体最优性质的三角形网格 (尽管对于是否最优至今仍然有一些争论^[3]), 且可以尽可能地避免病态三角形的出现. 因此, Delaunay

三角剖分在许多领域得到了很好的应用,尤其是在实体几何造型和有限元网络的自动生成等研究领域,该方法得到了广泛的重视^[4].

然而,在对文献[1]、[2]中使用的二维任意域的 Delaunay 三角剖分算法进行分析的过程中,我们发现该算法对于特定的平面点集进行剖分处理时,有出现错误的情况;通过进一步的讨论和分析,我们对算法进行了改进,从而提高了算法的健壮性.

1 二维任意域的 Delaunay 三角剖分算法

研究证明,同 Voronoi 图互为对偶图的 Delaunay 三角剖分图遵循“最大-最小角”和“约束圆”两个准则,且二个准则是等价的^[5],也正是这两个准则成为 Delaunay 三角剖分算法的生成依据.现在比较常用的 Delaunay 三角剖分算法是以非自相交多边形为问题域,并以 Lawson 三角剖分一个严格凸多边形的过程中提出的“最大-最小角”优化准则为基础发展而来的,算法简述如下^[1,2]:

二维任意多边形是二维任意域的归一化描述,因为任何二维曲线均可以使用小直线段进行拟合.另外,不失一般性,我们规定沿面上的任意一条边前进时,其左侧是图形区域.也就是说,图形区域的外环是逆时针走向,内环是顺时针走向.

令多边形的边数为 N ,第 K 条边的起点为 L_{K1} ,终点为 L_{K2} .此时算法处理的二维任意域则不再有内、外环之分.具体算法如下:

(1) 若 $N = 3$,则剖分结束,否则令 $K = 1$,进入第(2)步;

(2) $K = K + 1$,若 L_{K2} 在有向线段 $L_{11}L_{12}$ 的左侧,进入第(3)步,否则回到第(2)步;

(3) 若当前多边形其余各边与线段 $L_{11}L_{K2}$ 或 $L_{12}L_{K2}$ 相交,回到第(2)步,否则进入第(4)步;

(4) 将节点 L_{K2} 保存在候选节点链表中,若 $K = N$,进入第(5)步,否则回到第(2)步;

(5) 从候选节点中找出与节点 L_{11} 、 L_{12} 形成外接圆半径最小的节点 L_{02} ,则 L_{11} 、 L_{12} 、 L_{02} 必然构成一个有效的 Delaunay 三角形.然后进行如下修正:

① 若线段 $L_{11}L_{02}$ 和 $L_{12}L_{02}$ 都不是当前多边形的边界线段,则令 $N = N + 1$, $L_{12} = L_{02}$, $L_{N1} = L_{02}$, $L_{N2} = L_{12}$,回到第(1)步;

② 若线段 $L_{11}L_{02}$ (或 $L_{12}L_{02}$)是当前多边形的第

M 条边界线段,而线段 $L_{12}L_{02}$ (或 $L_{11}L_{02}$)不是当前多边形的边界线段,则令 $L_{11} = L_{02}$ (或 $L_{12} = L_{02}$), $L_{M1} = L_{N1}$, $L_{M2} = L_{N2}$, $N = N + 1$,回到第(1)步;

③ 若线段 $L_{11}L_{02}$ 和 $L_{12}L_{02}$ 分别是当前多边形的第 M 条和第 N 条边界线段,则将线段 $L_{11}L_{12}$ 、第 M 条和第 N 条边界线段从当前多边形中删去, $N = N - 3$,回到第(1)步.

2 算法的缺陷及健壮性补充

通常条件下,上述算法可以进行正确的 Delaunay 三角剖分.图1是一个正确的 Delaunay 三角剖分实例,图中粗黑线为多边形的内、外环,细黑线是 Delaunay 三角剖分路径,下同.

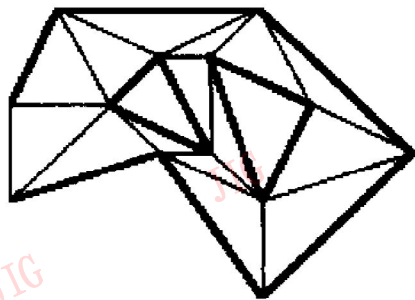


图1 DT 示例

然而,算法有时不能给予我们希望的健壮性,因为在特定点集中经过算法第(3)步取得的候选节点,在根据算法第(5)步的 Delaunay 三角形判定条件进行判断时偶尔会出错,即出现“位置违约”点.所谓“位置违约”点是指候选节点链表中依据算法第(5)步的判据虽然有条件成为 Delaunay 三角形的构成点,但将是违背 Delaunay 三角剖分“约束圆准则”的点.图2中的点 C 、 D 和 L_{12} 均为某一内环上的顶点,而点 L_{11} 为外环上的一个顶点,如依照上述算法,点 C 、 D 均符合条件进入候选节点链表,因为线段 $L_{11}-C$ 、 $L_{12}-C$ 、 $L_{11}-D$ 、 $L_{12}-D$ 均不与多边形边界相交.

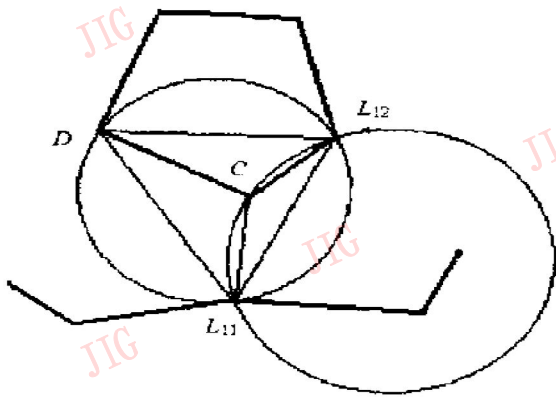


图2 点 D 位置违约

不失一般性,假定只有点 C 、 D 进入候选节点链表,依照算法第(5)步的 Delaunay 三角剖分的判据(外接圆半径最小),三角形 $L_{11}DL_{12}$ 即成为所选,但这显然违背了约束圆准则,因为点 C 位于所选三角形的内部,并且随着算法动态修改环的边表,点 C 成为不确定点,如此一来,就破坏了任意多边形原来的固有边界条件.上述情况出现的原因在于:尽管算法使用的数据结构对于约束域的范围进行了定义(即规定了边的走向),但在算法中仅仅通过点是否位于有向线段的左侧和线段是否相交等判断,并不能避免上面提到的“位置违约”点的出现,并且在判断线段是否相交时,“位置违约”点能够遮盖约束域的有效范围,如图 2 中,线段 $L_{12}D$ 和 $L_{11}D$ 没有与约束域边界相交,但这一信息是不真实的,因为线段 $L_{12}D$ 全部都在约束域的外面.这种情况能在外环与内环、内环与内环之间的三角剖分过程中发生,由于算法使用的数据结构无内、外环之分,并且边表中每条边的准确几何含义不存在,因此“位置违约”是不可避免的.同时,前面提到 Lawson 已证明了“最大最小角”和“约束圆”两个准则是等价的,虽然从图 2 直观上可以看到“外接圆半径最小”,但并不能全面描述“约束圆准则”,从而“位置违约”出现后,算法中的判据就有机会造成 Delaunay 三角剖分的失败.

通过上面对问题的分析,针对问题产生的原因,考虑如下改进算法:

方法一:“位置违约”点的出现是因为在算法的数据结构中,忽略了内外环边表的准确几何含义,使得在非自相交多边形边表中的线段相交判断失误,因而可以考虑修改算法的数据结构,并在其中增加内外环标志,同时在算法第(3)步关于线段相交的问题中加入以下判断:

若线段 $L_{11}L_{k2}$ 或 $L_{12}L_{k2}$ 与多边形不相交(在非自相交多边形意义下),但二者中有一个是某同一内环中非同一环边的两个顶点,则进入算法第(2)步;这就避免了“位置违约”点进入候选节点链表.

方法二:应该说,前面的算法在不出现位置违约的前提下,原有的“准”Delaunay 三角剖分判据是胜任的.但由于三角剖分在应用中仅作为一种描述手段,因此实际数据点集有可能出现“位置违约”点.若已经将上述算法应用到实际中了,则修改数据结构显然比较困难,那么在这种情况下可以将算法第(5)步中的 Delaunay 三角剖分判据直接改为“约束圆准则”,也同样可以达到正确剖分的目的,即对任何一

个进入候选节点链表中的顶点,视其与顶点 L_{11} 、 L_{12} 构成的三角形的外接圆的内部是否有候选节点中的其它点,若否,则该顶点即成为 Delaunay 三角剖分的所选顶点.

3 结束语

应该说,二维任意域的 Delaunay 三角剖分算法是一个相当基本的网格划分算法,尽管二维 Delaunay 三角剖分算法多种多样,但鉴于该算法概念简单,通用性强,因而受到了研究开发人员的重视.由于其应用日益广泛,因此有必要对算法的缺陷进行探讨和完善,从而提高其健壮性.图 3 是由于“位置违约”导致错误的 Delaunay 三角剖分的实例.由图 3 可见,剖分的结果将内环的一个顶点丢失了.通过对算法的改进,得到图 4,它是相对图 3 的正确 Delaunay 三角剖分结果.

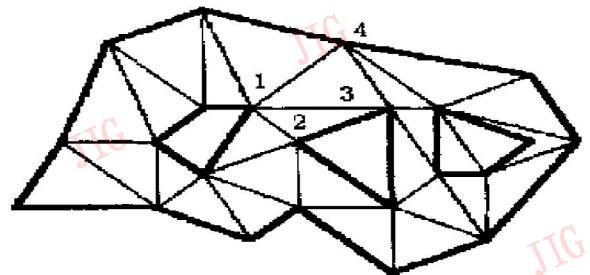


图 3 错误的 DT 结果

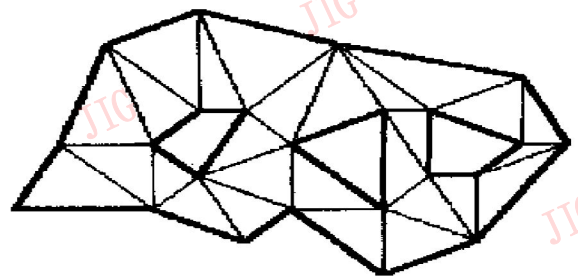


图 4 正确的 DT 结果

另外,二维任意域中出现的“退化”现象(四点共圆)对本文提出的算法健壮性补充同样没有实质性的影响,当然也可以在算法实现过程中考虑使用参考文献[1]中提出的思路进行相应的处理,如图 3 中的顶点 1、2、3、4 实际上构成了“退化”,而从图 4 可以看出,其处理结果是可以接受的,之所以点集之间的关联出现了差别,是由于算法实现过程中在确定构成 Delaunay 三角形的节点时,选择候选共圆节点的顺序不同造成的,但这显然并不影响剖分结果.同时文中提出的补充方法二,即修改原算法的判据,直接使用“约束圆”准则,以避免错误的剖分结果的出

现,但是值得指出的是,对原算法作这样修改只会增加一点计算复杂度,即对时间复杂度并无影响,因而修改后的算法时间复杂度不变,仍然为 $O(N^2)$ ^[1],其中 N 为待剖分的多边形的边数.

参考文献

- 1 丁永祥,夏巨谟,王英等.任意多边形的Delaunay三角剖分.计算机学报,1994,17(4):270~275.
- 2 陈永府,张华,陈兴等.任意曲面的三角形网格划分.计算机辅助设计与图形学学报,1997,9(5):396~401.
- 3 洪家宝,丁明锋,李星原.三角剖分的模拟退火算法.计算机学报,1994,17(9):682~689.
- 4 普雷帕拉塔 F P,沙莫斯著 M I,计算几何导论.庄心谷译.北京:科学出版社,1990.
- 5 Lawson C L. Software for C^1 surfaces interpolation. Mathematical Software III Academic Press, 1977, 161~194.



杨磊 28岁,硕士,研究兴趣集中在计算机在化学工程中的应用.



吴涛 27岁,硕士,研究方向主要涉及计算机图形学及计算机网络,目前从事教学和研究工作.

2001年图像科学与复印技术国际学术会议征文通知

为了促进我国复印行业的技术进步,不断扩大行业的技术领域,加强从事图象科学与复印技术研究的中外学者、专家之间的学术交流,由中国仪器仪表学会复印科学与工程学会主办,美国图像科学与工程学会、日本图像学会协办的“2001年图像科学与复印技术国际学术会议”定于2001年5月20日~24日在昆明市召开.届时将有美国、日本、德国、英国等国家的专家学者到会交流.我们热切欢迎国内广大从事图象与复印技术研究的科技工作者积极投稿.拟分四个专业组:

一、复印技术

- | | |
|--------------------|-----------------|
| 1. 复印过程与设备的优化设计 | 6. 喷墨打印过程与设备 |
| 2. 复印材料(感光材料与显影材料) | 7. 热敏打印过程与设备 |
| 3. 彩色复印机 | 8. 其它印字技术 |
| 4. 磁化复印技术与离子复印技术 | 9. 输入、输出、扫描技术设备 |
| 5. 液体显影剂及设备 | |

二、图象处理

- | | |
|--------------|----------------|
| 1. 图象获取和传输 | 4. 图象的自动测量与识别 |
| 2. 数字和光学图象处理 | 5. 图象新的传感技术 |
| 3. 图象质量与测量 | 6. 颜色:再现、科学和标准 |

三、特种纸

- | | |
|----------|----------------|
| 1. 复印用纸 | 3. 喷墨打印用纸 |
| 2. 传真机用纸 | 4. 其它办公自动化设备用纸 |

四、办公自动化系统

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. 办公自动化通讯网络系统 | 3. 办公自动化的应用网络 |
| 2. 计算机在办公自动化中的应用 | 4. 办公自动化的多媒体应用 |

如您愿意参加本次会议并具有较强的英文基础,请详细填写本期第356页回执,并连同您的论文摘要(中、英文),用计算机软盘或电子邮件于2000年4月30日前寄回学会秘书处.来函请注明“国际会议稿件”.

地址:天津市红桥区昌图道7号(邮编:300131)

联系人:温 卉

电话:(022)26650855 传真:(022)26669189 E-mail:rsesc@public.tpt.tj.cn

稿件要求:全文不超过4000字,具体格式另行通知.